ECOLE POLYTECHNIQUE **OPTION P'**

CONCOURS D'ADMISSION 1986

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, on note $\| f \|$ la borne supérieure de la valeur absolue de toute fonction f à valeurs réelles définie et bornée sur $\mathbb{R}$. La dérivée k-ième de f, si elle existe, est notée $f^{(k)}$, et on convient que $f^{(0)}$ est f elle-même.

I

Pour tout entier n strictement positif on note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et dont les valeurs pour tout x réel sont données par

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

où les a_j et les b_j sont des réels.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_n$ et s'il existe un réel α et $2n+1$ réels distincts x appartenant à $[\, \alpha , \alpha + 2\pi\, [$ et tels que $f(x) = 0$, alors f est la fonction nulle.

2. Soient a et b deux réels et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = a \sin(nx + b)$. Montrer que $\| s' \| = n \| s \|$.

3. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{T}_n$ et un réel u pour lequel $g'(u) = \| g' \|$, avec $g'(u) > n \| g \|$, et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{n} \| g' \| \sin [n(x-u)] - g(x) \; .$$

a. Montrer que h change exactement $2n$ fois de signe sur l'intervalle $\left[\, u + \frac{\pi}{2n} , u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi \,\right[$.

b. Calculer $h'(u)$ et montrer que h' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[\, u , u + 2\pi\,]$.

c. Calculer $h''(u)$ et montrer que h'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[\, u , u + 2\pi\, [$. En déduire une expression explicite de g.

d. Les hypothèses faites sur g sont-elles compatibles entre elles ?

Tournez la page S. V. P.

4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_n$ et tout entier $k \geqslant 0$, établir l'inégalité

$$\| f^{(k)} \| \leqslant n^k \| f \| .$$

Si k et n sont fixés, existe-t-il des fonctions pour lesquelles l'égalité est atteinte ?

II

Pour tout entier n positif ou nul, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynômes d'une variable réelle, à coefficients réels, et de degré *au plus* égal à n. Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, on pose

$$N(P) = \sup_{-1 \leqslant t \leqslant 1} | P(t) |$$

et on note $N'(P)$ la plus grande des valeurs absolues des coefficients de P.

1. Soit C la fonction définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $C(x) = \cos [n (\operatorname{Arc} \cos x)]$.

a. Montrer que C coïncide sur $[-1, 1]$ avec une fonction de $\mathcal{P}_n$, qu'on notera aussi C, et calculer $N(C)$.

b. Etablir l'inégalité $| \sin nt | \leqslant n | \sin t |$ pour tout t réel. En déduire l'inégalité $N(C') \leqslant n^2$ puis la valeur de $N(C')$.

2. On note $x_1, \dots, x_n$ les racines de C, rangées dans l'ordre *décroissant.*

a. Vérifier que pour tout $x \in [x_n, x_1]$ on a $n\sqrt{1-x^2} \geqslant 1$.

b. Calculer $| C'(x_i) |$ en fonction de x_i pour $i = 1, \dots, n$.

3. Soit $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$; on pose

$$M(Q) = \sup_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \left(|Q(t)| \sqrt{1-t^2} \right).$$

a. Montrer que pour tout x réel n'annulant pas C on a

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) \frac{C(x)}{(x - x_i)\, C'(x_i)} .$$

b. Déduire de ce qui précède l'inégalité $N(Q) \leqslant nM(Q)$.

4. Soient P un polynôme appartenant à $\mathcal{P}_n$ et k un entier appartenant à $[0, n]$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$| P'(x) | \leqslant n\, N(P) (1 - x^2)^{-1/2}$$

[on pourra utiliser la fonction $t \to P(\cos t)$].

b. Etablir l'inégalité

$$N(P^{(k)}) \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!} \right]^2 N(P) .$$

c. Vérifier l'équivalence des deux normes N et N' sur $\mathcal{P}_n$ en précisant pour le quotient $N'(P)/N(P)$ un encadrement indépendant de $P \neq 0$.

III

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée n-ième.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme $P_x \in \mathcal{P}_{n-1}$ par

$$P_x(y) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x) \frac{y^k}{k!} .$$

a. Majorer $N(P_x)$ à l'aide de $\| f \|$ et de $\| f^{(n)} \|$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \in]0, n[$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en établissant la majoration

$$\| f^{(k)} \| \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!} \right]^2 \left(\| f \| + \frac{\| f^{(n)} \|}{n!} \right) .$$

2. On applique le résultat de la question précédente en remplaçant f par la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(\lambda x)$, où λ est un réel fixé. Par un choix convenable de λ, établir l'inégalité

$$\| f^{(k)} \| \leqslant 2 \frac{(n!)^{2 - \frac{k}{n}}}{[(n-k)!]^2} \| f \|^{1 - \frac{k}{n}} \| f^{(n)} \|^{\frac{k}{n}} .$$

3. Si de plus $f \in \mathcal{C}_{n_0}$ pour un entier n_0, f appartient à $\mathcal{C}_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ et le résultat de I.4 permet une majoration de $\| f^{(n)} \|$ par $n^n \| f \|$ qui, reportée dans le résultat de III.2, fournit une nouvelle majoration de $\| f^{(k)} \|$. Comparer cette majoration à celle obtenue directement en I.4 en donnant un équivalent simple du logarithme de leur quotient. (On rappelle que, lorsque n tend vers $+\infty$, la différence

$$\ln (n!) - \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n \right]$$

reste bornée.)

♦

X 86 Option P'- Corrigé

Auteur du corrigé : Robert Cabane ©2006

Inégalités style Kolmogorov

Partie I : Norme des dérivées des polynômes trigonométriques

1°) Un polynôme trigonométrique f d'ordre n au plus (soit : $f \in \mathcal{T}_n$) est une combinaison linéaire des fonction $\exp(ijx)$ pour j compris entre $-n$ et n. Si f est nulle en $2n+1$ points, alors $g(x) = e^{inx}f(x)$ fait de même, et g est un polynôme de degré $2n$ au plus en $q(x) = e^{ix}$. Comme les $2n+1$ points sont répartis sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π, leurs images par q sont distinctes (variations de l'exponentielle sur $[i\alpha, i\alpha + 2i\pi[$). Donc g est nulle à cause de son degré, et f aussi.

2°) Ici on a $\|s\| = |a|$ et $\|s'\| = |na|$ d'où l'égalité.

3°) a) Soit $h(x) = \frac{1}{n}\|g'\|\sin[n(x-u)] - g(x)$. Il s'agit évidemment d'un polynôme trigonométrique d'ordre n au plus (en développant le sinus et g), qui d'après la question 1 ne peut s'annuler plus de $2n$ fois sans être nulle. Et ici, si h était nulle, alors g serait proportionnelle à s (avec $b = -nu$) et l'on ne pourrait avoir $g'(u) > n\|g\|$. Montrons que h s'annule $2n$ fois. Pour cela, l'on calcule :

$$h(u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{n}g'(u)(-1)^k - g(u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n})$$

et comme $|g'(u)|$ est plus grand que $n|g(x)|$, le signe de $h(u + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ est $(-1)^k$. Ce signe change $2n$ fois lorsque k varie de 0 à $2n$. Par continuité, il en résulte que h s'annule $2n$ fois au moins sur l'intervalle $]u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$. La 2π-périodicité de h permet de ramener un éventuel zéro situé dans $[u + 2\pi, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi[$ en un zéro dans $[u, u + \frac{\pi}{2n}[$, ce qui achève de donner à h ses $2n$ zéros dans $[u, u + 2\pi[$.

b) On a : $h'(x) = \|g'\|.\cos(n(x-u)) - g'(x)$ d'où $h'(u) = 0 = h'(u + 2\pi)$. D'autre part, l'application du théorème de Rolle entre les zéros successifs de h sur $[u, u+2\pi[$ fournit $2n-1$ zéros de h' dans $]u, u+2\pi[$. Donc h' s'annule $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi]$.

c) Toujours par le théorème de Rolle, h'' s'annule au moins $2n$ fois sur $]u, u+2\pi[$; et $h''(u) = -g''(u)$ est nul, car g' est maximale en u. Donc h'' est nulle en au moins $2n+1$ points de $[u, u+2\pi[$, et appartient à $\mathcal{T}_n$. D'après la question 1, h'' est nulle, donc h' est constante, et nulle puisqu'elle s'annule quelquefois. De même, h est nulle. Donc g est proportionnelle à une fonction s (avec $b = -nu$).

d) Dans ces conditions, la question 2 entraîne : $\|g'\| = n\|g\|$, ce qui contredit l'hypothèse sur u. Comme on peut changer g en $-g$, et que g est continue, on voit qu'il n'est pas possible d'avoir $\|g'\| > n\|g\|$. C'est donc que pour tout polynôme trigonométrique f d'ordre n au plus l'on a : $\|f'\| \leqslant n\|f\|$.

4°) La question précédente a prouvé que pour $k = 1$ l'on a : $\|f^{(k)}\| \leqslant n^k\|f\|$. Une récurrence immédiate montre alors cette inégalité pour tout k. On peut avoir égalité (par la fonction sinus).

Partie II : Norme des dérivées d'un fonction polynôme, sur $[-1, 1]$

1°) a) Il s'agit des polynômes de Tchebychef bien connus. On les définit par :

$$C_0 = 1, \quad C_1 = X, \quad C_{n+1} = 2C_n - C_{n-1}$$

ce qui prouve immédiatement que C_n est de degré n, à coefficients entiers et coefficient dominant 2^{n-1}. Le fait que l'on ait : $C_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ provient de la factorisation de : $\cos n\theta - \cos(n-2)\theta$. Il en résulte que sur $[-1,1]$ C prend ses valeurs dans $[-1,1]$, et $C(1) = 1$. Donc on a : $N(C) = 1$.

b) Montrons, par récurrence que n, l'inégalité : $|\sin nt| \leqslant |\sin t|$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour $n = 1$ c'est immédiat. Supposons l'inégalité vraie sous cette forme. On a alors :

$$|\sin(n+1)t| = |\sin nt \cos t + \cos nt \sin t| \leqslant |\sin nt| + |\sin t| \leqslant n|\sin t| + |\sin t|$$

ce qu'il fallait. Notons que cette inégalité est assez bonne au voisinage des multiples de π. Cependant, l'on a : $C'(\cos\theta)\sin\theta = n\sin n\theta$ d'où par l'inégalité précédente : $|C'(\cos\theta) \leqslant n^2|$; et lorsque θ tend vers 0, la première égalité devient équivalente à : $C'(1)\theta = n^2\theta$ d'où $C'(1) = n^2$; donc $N(C') = n^2$.

2°) a) Les racines de C sont toutes réelles, car on en trouve effectivement n (distinctes) qui sont dans l'intervalle $[-1,1]$, soit (en ordre décroissant) : $x_k = \cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$. Un élément x de l'intervalle $[x_n, x_1]$ peut s'écrire : $x = \cos\alpha$ avec $\alpha \in [\frac{\pi}{2n}, \pi - \frac{\pi}{2n}]$. Alors $\sqrt{1-x^2} = \sin\alpha \geqslant \sin\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n}$, ce qu'il fallait.

b) Ayant $C(x_i) = \cos(n\theta_i) = 0$, on a $\sin(n\theta_i) = \pm 1$ d'où $|C'(x_i)| = |\frac{\pm n}{\sin\theta_i}| = \frac{n}{\sqrt{1-x_i^2}}$

3°) a) Nous considérons la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{Q}{C}$, qui a pour pôles (éventuels) simples les x_i ; le résidu en un tel pôle se calcule comme toujours selon la formule : $\frac{Q(x_i)}{C'(x_i)}$, d'où la formule. On peut aussi évoquer l'interpolation de Lagrange.

b) Sur $[x_n, x_1]$ l'on a $n\sqrt{1-x^2} \geqslant 1$, d'où : $|Q(x)| \leqslant n\sqrt{1-x^2}|Q(x)| \leqslant nM(Q)$. Prenons alors $x \in]x_1, 1]$; on a :

$$|Q(x)| \leqslant \sum |Q(x_i)| \cdot \frac{|C(x)|\sqrt{1-x_i^2}}{n|x-x_i|}$$

et dans cette somme $C(x)$ et $|x-x_i|$ sont positifs. On a donc :

$$|Q(x)| \leqslant \frac{M(Q)}{n} \sum \frac{|C(x)|}{|x-x_i|}$$

et cette dernière somme est exactement $C'(x)$ (on le voit en remplaçant Q par C'). On a vu que $N(C') = n^2$, ce qui permet de majorer $|Q(x)|$ par $nM(Q)$, ce qu'il fallait. Sur $[-1, x_n[$ on fait un travail analogue (les termes sont alors tous négatifs).

4°) a) Posons $h(t) = P(\cos t)$ et $x = \cos t$. Il s'agit d'un polynôme trigonométrique d'ordre n au plus (chaque $\cos^p t$ en est un, par linéarisation). D'après la partie I, l'on a : $\|h'\| \leqslant n\|h\| = nN(P)$ et $h'(t) = -\sin t\, P'(\cos t) = -\sqrt{1-x^2}P'(x)$ d'où $|P'(x)| \leqslant n\, N(p)(1-x^2)^{-1/2}$.

b) On déduit de ce qui précède que : $M(P') \leqslant nN(P)$ d'où par le 3b : $N(P') \leqslant n^2N(P)$, ce qui donne l'inégalité cherchée pour $k=1$. On poursuit par récurrence : si $N(P^{(k)}) \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]^2 N(P)$ alors

$$N(P^{(k+1)}) \leqslant (\deg P^{(k)})^2 N(P^{(k)}) \leqslant (n-k)^2 \cdot \frac{n!^2}{(n-k)!^2}N(P) = \frac{n!^2}{(n-k-1)^2}N(P)$$

ce qu'il fallait.

c) Supposons que l'on ait : $P = \sum a_i X^i$; alors $N(P) \leqslant \sum |a_i| \leqslant (n+1)N'(P)$ (on travaille sur $[-1,1]$). On a aussi : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} \leqslant \dfrac{n!^2}{k!(n-k)!^2}N(P) \leqslant 2^n n!$ (car $\binom{n}{k} \leqslant 2^n$; majoration très grossière mais on fait ce qu'on peut...). Finalement, le quotient $\dfrac{N'(P)}{N(P)}$ est compris entre $\frac{1}{n+1}$ et $2^n n!$.

Partie III : Application à des inégalités de Kolmogorov

1°) a) La formule de Taylor-Lagrange peut s'écrire ici : $f(x+y) = P_x(y) + f^{(n)}(c)\dfrac{y^n}{n!}$. Comme ici y sera entre -1 et 1, on peut majorer $P_x(y)$ (et $N(P_x)$) par $\|f\| + \dfrac{\|f^{(n)}\|}{n!}$.

b) Alors $|f^{(k)}(x)| = |P_x^{(k)}(0)| \leqslant N(P_x^{(k)}) \leqslant \dfrac{n!^2}{k!(n-k)!^2}N(P_x) \leqslant \dfrac{n!^2}{(n-k)!^2}(\|f\| + \dfrac{\|f^{(n)}\|}{n!})$ ce qu'il fallait.

2°) En prenant $\varphi(x) = f(\lambda x)$ l'on obtient : $\lambda^k\|f^{(k)}\| \leqslant \dfrac{n!^2}{(n-k)!^2}(\|f\| + \dfrac{\lambda^n\|f^{(n)}\|}{n!})$ ce qui indique qu'il faut choisir λ pour diminuer une expression du style : $a\lambda^{-k} + b\lambda^{n-k}$. On peut, par exemple, faire en sorte que les deux termes de cette somme soient égaux (ce n'est pas le minimum). Cela nous conduit à prendre : $\lambda = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, rendant la somme égale à : $2a^{(1-k/n)}b^{k/n}$.

En reportant, on obtient : $\|f^{(k)}\| \leqslant \dfrac{n!^2}{(n-k)!^2} \cdot n!^{-k/n}\left(\|f\|^{(1-k/n)} + \|f^{(n)}\|^{k/n}\right)$ d'où la majoration proposée.

3°) Disons tout de suite que la question est ambiguë (qui tend vers l'infini : n ou k, ou les deux ?) et que, même avec une interprétation raisonnable, l'on finira par trouver après un certain volume de calcul que la nouvelle majoration est pire que la précédente (le rapport demandé semble être équivalent à $k \ln n$) ! Nous nous abstiendrons donc. Les inégalités de Kolmogorov sont du même type, avec la constante $\dfrac{n!^{2-k/n}}{(n-k)!^2}$ remplacée par une constante optimale, déterminée par récurrence.